

5. Corrigés des exercices d'entraînement et de préparation au DS

Exercice 3.A :

- $v_n > 1\,000$ équivaut à $n^3 > 1\,000$ qui équivaut à $n > \sqrt[3]{1\,000}$ qui équivaut à $n > 10$.
Donc à partir du rang $n = 11$, on a $v_n > 1\,000$.
- Soit A un réel.
Il faut montrer qu'il existe un rang N tel que si $n \geq N$,
alors $n^3 \in]A; +\infty[$, c'est-à-dire $n^3 > A$.
Si $A < 0$ alors $N = 0$ convient car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 \geq 0 > A$.
Si $A \geq 0$. L'inégalité $n^3 > A$ équivaut à $n > \sqrt[3]{A}$, donc en notant N le plus petit entier naturel strictement supérieur à $\sqrt[3]{A}$, on a : si $n \geq N$, alors $n^3 > A$.
Donc (v_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 3.B :

- À chaque étape, la variable u contient la valeur d'un terme de la suite (u_n) et la variable n contient la valeur de l'indice de ce terme.
Comme le premier terme de la suite (u_n) est $u_0 = 1$, on initialise la variable u à 1 et la variable n à 0.
À l'aide de la boucle « Tant que » dont la condition d'entrée est $u \leq A$, on répète le calcul des termes de la suite jusqu'à en trouver un strictement supérieur à A .
À chaque passage dans la boucle, on calcule le terme suivant et on augmente l'indice de 1 avec les instructions $u \leftarrow u + n + 1$ et $n \leftarrow n + 1$.
L'indice du premier terme qui est strictement supérieur à A est contenu dans la variable n après l'exécution de l'algorithme.
- Avec $A = 200$, on obtient $n = 20$, puis avec $A = 5\,000$, on obtient $n = 100$.

```

u ← 1
n ← 0
Tant que u ≤ A
    u ← u + n + 1
    n ← n + 1
Fin Tant que
    
```

```

1 def seuil_2(A):
2     u=1
3     n=0
4     while u<=A:
5         u=u+n+1
6         n=n+1
7     return n
    
```

Exercice 3.C :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 = 5$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n = +\infty$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n + 3) = +\infty$. D'après la règle sur la limite d'une somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2 \right) = 2$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty$. Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 1) = -\infty$.
D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, donc d'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} i_n = 0$.

Exercice 3.D :

- 1** $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$: on est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On factorise par n^2 pour n entier naturel non nul car c'est le terme prépondérant : $u_n = n^2 \left(\frac{3n}{n^2} - 1 \right)$. On a $\frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$, d'où $u_n = n^2 \left(\frac{3}{n} - 1 \right)$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n} - 1 \right) = -1$, donc d'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- 2** $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 + 2n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n^3 + 1) = +\infty$: on est en présence de la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». On factorise le numérateur et le dénominateur par n^3 pour n entier naturel non nul car c'est le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur : $v_n = \frac{n^3 \left(1 + \frac{2n}{n^3} \right)}{n^3 \left(5 + \frac{1}{n^3} \right)} = \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{1}{n^3}}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^2} \right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{n^3} \right) = 5$, donc d'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{5}$.
- 3** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 2n^3) = +\infty$, on est en présence de la forme indéterminée « $0 \times \infty$ ». Pour tout entier naturel n non nul, on développe : $w_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2n^3}{n^2} = \frac{1}{n^2} + 2n$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$, donc d'après la règle sur la limite d'une somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.
- 4** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. On est en présence de la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». On a pour tout entier naturel n non nul : $z_n = \frac{\frac{2}{n\sqrt{n}}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{2}{n\sqrt{n}}}{\frac{2\sqrt{n} + n}{n\sqrt{n}}} = \frac{2}{n\sqrt{n}} \times \frac{n\sqrt{n}}{2\sqrt{n} + n} = \frac{2}{2\sqrt{n} + n}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2\sqrt{n} + n) = +\infty$, donc d'après la règle sur la limite d'un quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2\sqrt{n} + n} = 0$. Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

Exercice 3.E :

- 1 Comme $(-1)^n$ est égal à -1 ou 1 on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Donc pour tout entier naturel n non nul : $3 \leq 4 + (-1)^n \leq 5$, en divisant par n^2 qui est strictement positif on conserve l'ordre donc $\frac{3}{n^2} \leq \frac{4 + (-1)^n}{n^2} \leq \frac{5}{n^2}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$, d'après le théorème des « gendarmes », la suite (u_n) converge vers 0.
- 2 On a pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1 :
 $-1 \leq -\cos(n) \leq 1$, donc $\sqrt{n} - 1 \leq \sqrt{n} - \cos(n) \leq \sqrt{n} + 1$.
Les trois membres de l'inégalité sont strictement positifs puisque $n > 1$, donc
 $\frac{1}{\sqrt{n} + 1} \leq \frac{1}{\sqrt{n} - \cos(n)} \leq \frac{1}{\sqrt{n} - 1}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + 1} = 0$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - 1} = 0$.
Donc, d'après le théorème des « gendarmes », la suite (v_n) converge vers 0.
- 3 Pour tout entier naturel n , on a $(-1)^n \geq -1$ car $(-1)^n$ est égal à -1 ou 1 . Donc pour tout entier naturel n , $n^3 + (-1)^n \geq n^3 - 1$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - 1 = +\infty$, donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$. Donc la suite (w_n) ne converge pas. Elle diverge et sa limite est $+\infty$.

Exercice 3.F :

- 1 Les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont des suites géométriques.
- a. Pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3}{5^n} = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$. Comme, $-1 < \frac{1}{5} < 1$ on a :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. La suite (u_n) converge vers 0.
- b. $(\sqrt{3})^n$ est de la forme q^n avec $q > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$. Et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -4 = -4$.
Donc d'après la règle sur le produit de limites (v_n) diverge vers $-\infty$.
- c. $(-2)^n$ est de la forme q^n avec $q < -1$.
Donc (w_n) n'a pas de limite, cette suite diverge.
- 2 $3 > 1$ et $5 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$.
On est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».
On peut écrire pour tout entier naturel n , $u_n = 5^n \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1 \right]$.
Or $-1 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$. On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1 \right] = -1$. De plus
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$, d'où, d'après la règle sur le produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 3.G :

- ① $u_n - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{4(4n+1) + 5(1-5n)}{4(1-5n)} = \frac{-9n+9}{4(1-5n)}$. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $-9n+9 \leq 0$ et $4(1-5n) < 0$. D'où pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $u_n - \left(-\frac{5}{4}\right) \geq 0$ et donc $u_n \geq -\frac{5}{4}$. Donc (u_n) est minorée par $-\frac{5}{4}$.

- ② Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$: « $u_n \leq 4$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ et $1 \leq 4$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n \leq 4$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq 4$.

On a : $u_n \leq 4$ donc $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3} \times 4$ puis $\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq \frac{2}{3} \times 4 + \frac{4}{3}$.

Or $\frac{2}{3} \times 4 + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4$. Donc on a : $\frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq 4$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 4$.

$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a $u_n \leq 4$ pour tout entier naturel n .

Exercice 3.H :

- ① a. Pour tout entier naturel n , on note $P(n)$: « $u_n \leq 7$ ».

Initialisation : $u_0 = 7$ et $1 < 7$, donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n \leq 7$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq 7$.

On a : $u_n \leq 7$ donc $\frac{1}{3}u_n \leq \frac{1}{3} \times 7$ puis $\frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \leq \frac{1}{3} \times 7 + \frac{14}{3}$. Or $\frac{1}{3} \times 7 + \frac{14}{3} = \frac{21}{3} = 7$.

Donc on a : $\frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} \leq 7$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 7$.

$P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire que l'on a $u_n \leq 7$ pour tout entier naturel n .

- b. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3}$.

Or pour tout entier naturel n , $u_n \leq 7$. Donc pour tout entier naturel n , $-\frac{2}{3}u_n \geq -\frac{14}{3}$.

D'où pour tout entier naturel n , $-\frac{2}{3}u_n + \frac{14}{3} \geq 0$. Donc pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

- ② La suite (u_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge.

Exercice 3.1 :

- 1 a.** Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, soit la propriété $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 1$ ».

Initialisation : $u_2 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$, donc $0 \leq u_2 \leq 1$. $P(2)$ est donc vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2 tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $0 \leq u_n \leq 1$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2}$.

Or pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $n^2 - 1 > 0$.

Donc $0(n^2 - 1) \leq u_n(n^2 - 1) \leq 1(n^2 - 1)$ c'est-à-dire $0 \leq u_n(n^2 - 1) \leq n^2 - 1$.

Puis pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $n^2 > 0$.

Donc $\frac{0}{n^2} \leq u_n \frac{n^2 - 1}{n^2} \leq \frac{n^2 - 1}{n^2}$.

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, c'est-à-dire que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

- b.** Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - u_n \left(1 - \frac{1}{n^2} - 1\right) = -\frac{u_n}{n^2}.$$

Or pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $0 \leq u_n$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

- 2** La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone cette suite est convergente.

- 3** Pour tout entier naturel $n \geq 2$, soit la propriété $P(n)$: « $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$ ».

Initialisation : $u_2 = 1$ et $\frac{2}{2(2-1)} = 1$, donc $u_2 = \frac{2}{2(2-1)}$. $P(2)$ est donc vraie.

Hérédité : on considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et tel que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire tel que $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$. On montre que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \frac{n+1}{2((n+1)-1)}$.

$$\text{On a : } u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n}{2(n-1)} \times \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{1}{2(n-1)} \times \frac{(n-1)(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

Donc $u_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1-1)}$. $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : la propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, c'est-à-dire que $u_n = \frac{n}{2(n-1)}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Un calcul direct de la limite aboutit à la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Pour tout entier

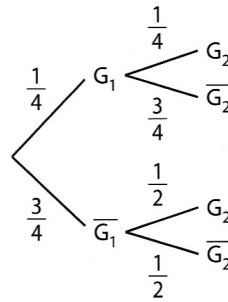
$$\text{naturel } n \text{ supérieur ou égal à 2, } u_n = \frac{n}{2(n-1)} = \frac{n}{2n-2} = \frac{n}{n(2 - \frac{2}{n})} = \frac{1}{2 - \frac{2}{n}}.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{2}{n} = 2. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3.J :

- 1 On construit un arbre pondéré traduisant la situation.
On utilise la formule des probabilités totales avec la partition $(G_1, \overline{G_1})$:

$$\begin{aligned} p_2 &= P(G_2) = P(G_1 \cap G_2) + P(\overline{G_1} \cap G_2) \\ &= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$



De même avec la partition $(G_n, \overline{G_n})$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(G_{n+1}) = P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ &= P(G_n) \times P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n}) \times P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{donc } p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

- 2 suite_C10 (10) renvoie :

[0.25, 0.4375, 0.390625, 0.4023437,
0.3994140625, 0.4001464, 0.3999633,
0.4000091, 0.3999977, 0.4000005].

On conjecture donc que p_n converge vers 0,4.

```
1 def suite_C10(n):
2     P=1/4
3     L=[P]
4     for i in range(2,n+1):
5         P=-0.25*P+0.5
6         L.append(P)
7     return(L)
```

- a. Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{4}u_n.$$

(u_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

b. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = u_1 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Or $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$. Donc $u_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

D'où pour tout entier naturel n non nul, $p_n = u_n + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. On a $-\frac{1}{4} \in]-1; 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{2}{5} = 0,4$$

La conjecture faite en 2. est donc démontrée. La probabilité de victoire du joueur tend vers 0,4 au fur et à mesure que les parties s'enchaînent.